

1 Généralités

L'information est la matière première de l'informatique.

Un **programme**, constitué d'**informations**, stocke, manipule, transforme, d'autres informations, à l'aide de **machines**

Toutes ces informations sont à un moment représentées par des nombres (séquence de 0 et 1).

Le binaire est la base la plus simple utilisable et elle est adaptée à l'électronique.

L'unité d'information est le *bit* : 0 ou 1. Un groupe de 8 bits constitue un octet (*byte* en anglais).

2 Valeur d'un nombre écrit en base b

En base b , on utilise exactement b symboles (les chiffres).

L'écriture en base b : $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$ représente un nombre qui a pour valeur :

$$v(c_n) \times b^n + v(c_{n-1}) \times b^{n-1} + \dots + v(c_1) \times b^1 + v(c_0) \times b^0$$

avec $v(c_k)$ la valeur du chiffre c_k .

3 Écriture d'un nombre dont on connaît la valeur

En effectuant des divisions successives de n par la base b , la séquence des restes donne la valeur de chaque chiffre de l'écriture de n en base b .

4 Nombres à virgule

4.1 Base 2 \rightarrow base 10

$$\begin{aligned} 100,011_2 &= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + \\ &\quad 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 4,375 \end{aligned}$$

4.2 Base 10 \rightarrow base 2

$$\begin{aligned} 0,6875 \times 2 &= 1,375 \\ 0,375 \times 2 &= 0,75 \\ 0,75 \times 2 &= 1,5 \\ 0,5 \times 2 &= 1 \end{aligned}$$

$$0,6875_{10} = 0,1011_2$$

5 Développements binaires infinis

En base b , un nombre $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible) a une écriture finie si tous les facteurs premiers de q sont aussi des facteurs premiers de b . En binaire, seuls les nombres de la forme $\frac{p}{2^k}$ ont une écriture finie.

Certains nombres ont une écriture infinie en binaire. Par exemple :

$$0,2_{10} = 0,001100110011\dots_2 = 0,\overline{0011}_2$$

6 Nombres négatifs

Une fois choisi le nombre de bits du codage (n), on représente les entiers compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ comme d'habitude, et on choisit comme code d'un entier $-k$ compris entre -2^{n-1} et -1 : l'écriture binaire de $2^n - k$

Le complément à 2 est involutif.

7 Codage des nombres à virgule

7.1 Codage en virgule fixe

- Retenir un nombre fixe de chiffres.
- Garder simplement un nombre fixe de bits avant et après la virgule.
- L'espace entre 2 nombres qui se succède est toujours le même.
- **Problème** : l'erreur relative peut être grande

7.2 Codage en virgule flottante

- Norme IEEE754
- Idée : Retenir un nombre fixe de **chiffres significatifs**
- Les petits nombres seront plus *serrés* que les grands
- L'erreur relative est **tolérable**
- Simple précision (32 bits) et double précision (64 bits)

7.2.1 Écriture du nombre en notation scientifique en base 2 :

$$25,90625 \Rightarrow 11001,111101 \Rightarrow 1.1001111101 \times 2^4 \times (-1)^0$$

7.2.2 Écriture en simple précision

- 1 bit de signe
- 8 bits d'exposant décalé E ($E = e + 127$)
- 23 bits contenant les chiffres significatifs

$$\begin{array}{c} \underbrace{E:8 \text{ bits } (=e+127)} \\ \underbrace{0}_{s} \quad \overbrace{10000011}^{E} \quad \underbrace{100111110100\dots0}_{23 \text{ bits}} \end{array}$$

Types de nombres :

- Normalisés : $0 < E < 255 \Rightarrow (-1)^s \times 1, M \times 2^{E-127}$
- Dénormés : $E = 0$ et $M \neq 0 \Rightarrow 0, M \times 2^{-126} \times (-1)^s$
- Zéro : $E = 0$ et $M = 0$
- Infini : $E = 255$ et $M = 0 \Rightarrow (-1)^s \infty$
- Indéfini : $E = 255$ et $M \neq 0$

Flottants \neq réels

Il y a des nombres incodables, donc des erreurs d'arrondi.

En simple précision :

- 2^{127} se code $011111110\overbrace{0\dots0}^{22}$
- $2^{127} + 2^{104}$ se code $011111110\overbrace{0\dots0}^{22}1$

7.2.3 Autres paramètres pour le codage en virgule flottante

Avec l'avènement du deep learning, et la nécessité de stocker des quantités considérables de nombres (des centaines de milliards pour les LLM en 2023), il s'est avéré efficace de réduire la précision (pour cet exemple

d'application) en utilisant des codages sur 8 bits seulement avec 5 bits d'exposant et seulement 2 de mantisse ou 4 bits d'exposant et 3 de mantisse.